Messbare Mengen bilden Algebra

Sei μ ein (äußeres) Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{A} = 2^X$ einer Grundmenge X. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar gdw.

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \backslash A) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie:

a) $\emptyset$ ist messbar.

b) Nullmengen sind messbar.

c) X ist messbar.

d) Ist $A \in \mathcal{A}$ messbar, dann ist auch $X \backslash A$ messbar.

e) Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ messbar, dann ist auch $D := A_1 \cap A_2$ messbar.

f) Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ messbar, dann ist auch $V := A_1 \cup A_2$ messbar.

Bemerkung: Aus den Punkten a), d) und e) folgt bereits, dass die messbaren Mengen eine Algebra bilden.

Zusatzaufgabe: Zeige, dass die messbaren Mengen sogar eine σ-Algebra bilden, d. h.:

Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ messbar, dann sind auch

$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$$

messbar.